

مثال‌هایی در باب هم ارتفاعی

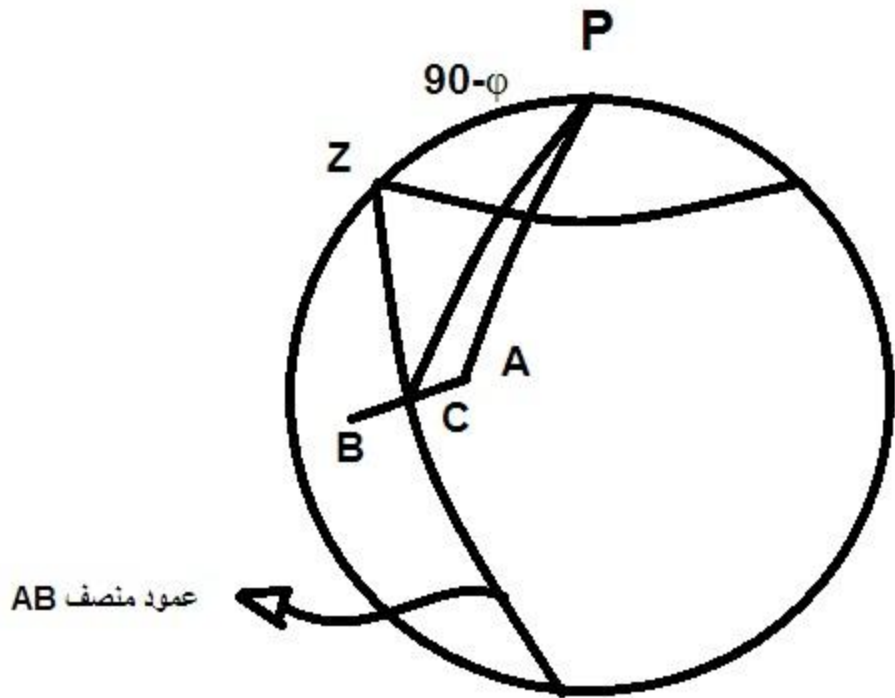
توجه: راه حلی که اینجا مطرح شده لزوماً تنها راه حل ممکن نیست و راه‌های دیگر مانند روش برداری و حل معادله مثلثاتی و... نیز مطرح هستند.

مثال: دو ستاره A و B در عرض جغرافیایی φ تنها یکبار و بالای افق هم ارتفاع می‌شوند. φ را بیابید. (سوال از احسان عابدی)

$$A: \begin{cases} \delta = 5.22^\circ \\ \alpha = 7\text{h } 39\text{min} \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \delta = -16.72^\circ \\ \alpha = 6\text{h } 49\text{min} \end{cases}$$

یکی از ایده‌های مطرح برای حل این مسئله، ایده عمود منصف کروی است. می‌دانیم در صفحه، عمود منصف یک پاره خط، خطیست که هر نقطه آن از دو سر پاره خط به یک فاصله است. این موضوع در کره نیز تا حدودی صادق است. یعنی دایره عظیمه‌ای که بخشی از یک دایره عظیمه را نصف می‌کند و بر آن عمود است، همان خاصیت عمود منصف مسطحه را دارد. این را می‌توانید به آسانی با هم‌نهشتی مثلث کروی اثبات کنید. اگر ما دایره عظیمه گذرنده از دو ستاره را در نظر بگیریم و عمود منصف آن را رسم کنیم، هر نقطه روی عمود منصف به یک فاصله از دو ستاره است و اگر سوسو روی عمود منصف قرار بگیرد، دو ستاره هم ارتفاع می‌شوند. همچنین سوسو بر روی دایره صغیره‌ای به شعاع $90-\varphi$ و حول P حرکت می‌کند. (ایده ستارگان ثابت و Z چرخان) پس تقاطع عمود منصف و دایره صغیره، جایی است که اگر Z در آن جا قرار گیرد در عرض جغرافیایی φ دو ستاره هم ارتفاع می‌شوند. ما می‌خواهیم دو ستاره یکبار هم ارتفاع شوند پس دایره صغیره و عمود منصف باید مماس باشند.



عمود منصف AB از C می‌گذرد پس $AC=AB$ و $\angle ZCB = 90$. با توجه به اینکه عمود منصف و دایره صغیره مماسند پس $\angle PZC = 90$. مشخصات A و B را داریم پس با رابطه کسینوس ها AB بدست می‌آید و همچنین $\angle PAB$ نیز بدست می‌آید.

$$\text{در مثلث PAC: } \begin{cases} AC = \frac{AB}{2} \\ PA = 90 - \delta_A \\ \angle PAC = \angle PAB \end{cases} \leftarrow \text{PC و } \angle PCA \text{ بدست می‌آید.}$$

$$\text{در مثلث PCZ: } \begin{cases} \angle PCZ = 90 - \angle PCA \\ PC \\ \angle PZC = 90 \end{cases} \leftarrow |\phi| \text{ بدست می‌آید. سپس با بررسی اینکه عرض باید شمالی}$$

یا جنوبی باشد تا دو ستاره بالای افق هم ارتفاع شوند، جواب نهایی بدست می‌آید.

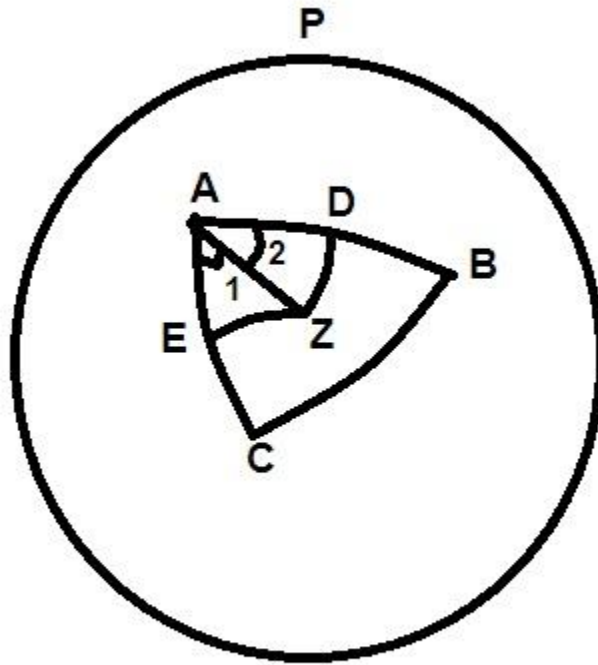
مثال: سه ستاره زیر در چه عرض جغرافیایی می‌توانند هم ارتفاع شوند؟

$$A: \begin{cases} \delta = 50^\circ \\ \alpha = 4h \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \delta = 30^\circ \\ \alpha = 7h \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} \delta = 15^\circ 36' 59'' \\ \alpha = 5h 31min 27s \end{cases}$$

این سه ستاره یک مثلث کروی ایجاد می‌کنند. می‌توانید نشان دهید عمود منصف‌های این مثلث هم‌رسند. این نقطه هم‌رسی از هر سه ستاره به یک فاصله است و اگر سرسو در این نقطه قرار بگیرد، سه ستاره هم ارتفاع می‌شوند. کافیست نقطه هم‌رسی دو عمود منصف را بیابیم چرا که عمود منصف‌ها هم‌رسند.



AC و AB و BC قابل محاسبه‌اند. عمود منصف‌های AB و AC را در نظر می‌گیریم. $\angle CAB$ هم قابل محاسبه است. همچنین در مثلث‌های AZE و AZD با نوشتن چهارجزئی یک دستگاه سه معادله سه مجهول تشکیل می‌شود.

همچنین $AE = \frac{AC}{2}$ و $AD = \frac{AB}{2}$ و AZ مشترک است.

$$\begin{cases} \angle A_1 + \angle A_2 = \angle EAD \\ \cos(AE) \cos A_1 = \sin(AE) \cot(AZ) \\ \cos(AD) \cos A_2 = \sin(AD) \cot(AZ) \end{cases}$$

با حل کردن دستگاه بالا، $\angle A_1$ و $\angle A_2$ و AZ پیدا می‌شود و از روی آن‌ها می‌توان φ را یافت.