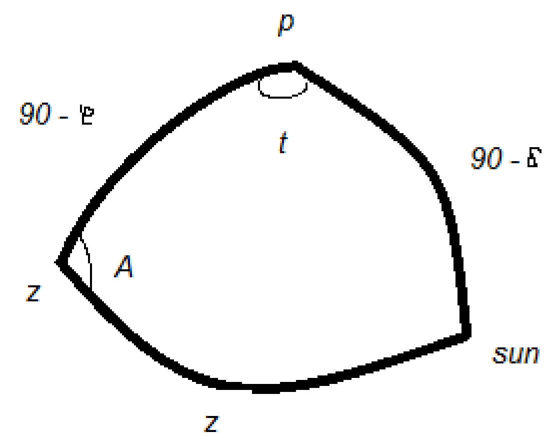
قصد داریم معادله ی نوک سایه یک میله عمودی را به دست آوریم به این منظور مثلث کروی زیر را برای خورشید در نظر بگیرید.



با استفاده از رابطه ی کسینوس ها و قیاسی در این مثلث داریم:

$$\cos\varphi\cos\delta\cos t = \cos z - \sin\varphi\sin\delta$$

$$sin\,\varphi\cos\delta\cos t = \sin z\cos A + cos\varphi\sin\delta$$

از تقسیم این دو رابطه داریم:

$$\tan\varphi = \frac{\sin\,z\cos\,A + cos\varphi\,\sin\,\delta}{\cos\,z - \sin\,\varphi\,\sin\,\delta}$$

حال اگر طول میله را h و طول سایه آن را r بگیریم خواهیم داشت

$$\tan z = \frac{r}{h}$$

$$\rightarrow \sin z = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \quad \cos z = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

پس با جای گذاری $\cos z$ و $\sin z$ در رابطه ی $\tan\varphi$ خواهیم داشت

$$\tan\varphi = \frac{\frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}\cos\,A + cos\varphi\,\sin\,\delta}{\frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} - \sin\,\varphi\,\sin\,\delta}$$

حال دستگاه مختصاتی را بر روی میله میگذاریم که z آن در جهت سمت الراس(میله) y آن در جهت جنوب و x آن در جهت غرب باشد.

زاویه θ را به صورت زیر تعریف میکنیم: $\theta = -(180 - A)$ که در واقع زاویه ای است که راستای سایه با جهت جنوب میسازد.

پس آگر بخواهیم معادله سایه را در صفحه ی x-y بنویسم خواهیم داشت:

$$r\cos\theta = x \qquad r\,sin\theta = y \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$\rightarrow tan\varphi = \frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + cos\varphi\,\sin\delta}{\frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} - \sin\varphi\sin\delta}$$

Or $$\frac{h\tan\varphi}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} - \sin\varphi\sin\delta\,tan\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + cos\varphi\sin\delta$$

$$\rightarrow \frac{h\tan\varphi - x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} = cos\varphi\sin\delta + \frac{(\sin\varphi)^2}{\cos\varphi}\sin\delta = \sin\delta\sec\varphi$$

$$\rightarrow h^2(tan\varphi)^2 - 2h\,tan\,\varphi\,x + x^2 = (x^2 + y^2 + h^2)(\sin\delta\sec\varphi)^2$$

$$\rightarrow (1 - \sin^2\delta\sec^2\varphi)x^2 - \sin^2\delta\sec^2\varphi\,y^2 - 2h\tan\varphi\;x + h^2(tan\varphi)^2 - h^2\sin^2\delta\sec^2\varphi = 0$$

از طرفی این جمله را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$h^2(tan\varphi)^2 - h^2\sin^2\delta\sec^2\varphi = \frac{h^2}{\cos^2\varphi}\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)$$

$$\rightarrow (1 - \sin^2\delta\sec^2\varphi)x^2 - \sin^2\delta\sec^2\varphi\,y^2 - 2h\tan\varphi\;x + \frac{h^2}{\cos^2\varphi}\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta) = 0$$

معادله ی بالا همان معادله ی مقطع مخروطی میباشد

ضریب y همواره منفی است(چرا؟) ولی ضریب x میتواند مثبت - منفی – صفر باشد پس:

برای $\varphi = 90°$ معادله به صورت زیر در میاید:

$$x^2 + y^2 - h^2 cot^2\varphi = 0$$

که معادله ی حاصل معادله ی یک دایره به شعاع $hcot\varphi$ است

برای به دست آوردن خروج از مرکز مقطع مخروطی مطابق زیر عمل میکنیم

$$(1 - \sin^2\delta \sec^2\varphi)x^2 - \sin^2\delta \sec^2\varphi\, y^2 = 0$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{(1-\sin^2\delta \sec^2\varphi)}}{\sin\delta\ \sec\varphi} x \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{(1-\sin^2\delta \sec^2\varphi)}}{\sin\delta\ \sec\varphi}$$

$$\rightarrow e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \frac{\cos\varphi}{\sin\delta}$$

$$e >=< 1 \rightarrow \varphi <=> 90 - \delta$$

پایان

تهیه کننده:عرفان بیات ایمیل erfan.bayat@yahoo.com