به نام حضرت دوست

جزوه قدر سطحی

I.R. IRAN
10th IOAA team

نویسنده

معین محمدی

وقتی میگوییم قدر حدی آسمان برابر ۴ است یعنی کم‌نور ترین ستاره‌ای که با چشم غیر مسلح دیده می‌شود قدری برابر ۴ دارد. ولی چرا در چنین آسمانی نمیتوانی کهکشان آندرومدا (m31) که قدری برابر ۳,۴ دارد را ببینیم؟ تفاوت کهکشان آندرومدا و یک ستاره با قدر ۳,۴ در چیست؟

واضح است که تفاوت این دو در اندازه دو جسم است. ستاره جسمی نقطه ای است و قادر به تفکیک آن نیستیم ولی کهکشان جسمی گستره است (قطر زاویه‌ای آندرومدا ۳ درجه است). با یک مدلسازی ساده می‌توانیم بهتر این موضوع را درک کنیم. همه تا به حال تجربه کرده و دیده‌ایم که با نگاه کردن به یک لامپ رشته‌ای ساده در مقایسه با یک لامپ کم‌مصرف با همان توان تابشی، چشممان بیشتر اذیت می‌شود. تفاوت این دو لامپ در مساحت قسمت تابش کننده‌شان است (لامپ رشته‌ای یک رشته نازک تنگستن و لامپ کم‌مصرف کل بدنه لامپ).

پس میزان حساسیت چشم، به اندازه جسم تابش‌کننده و مقدار شار دریافتی از آن بستگی دارد؛ نه فقط میزان شار دریافتی. حال می‌خواهیم یک معیار عددی برای این کمیت پیدا کنیم.

با تغییر فاصله لامپ‌ها از چشممان می‌توان حالتی ایجاد کرد که حساسیت چشم به هر دو لامپ برابر شود (به عنوان مثال لامپ رشته ای در ۱۰ متری و لامپ کم‌مصرف را در ۱ متری قرار داد). پس با این تفاسیر میتوان گفت پارامتر تاثیر گذار در حساسیت چشم زاویه فضایی جسم است (زاویه فضایی در ادامه توضیح داده شده است). پس معیار دیده شدن یا نشدن یک جسمِ گسترده میزان قدر آن در واحد زاویه فضایی است؛ که اگر از حدی بیشتر باشد آن جسم را نمیبینیم.

قدر (m) برای جسمی با شار F به این صورت است:

$$m_1 - m_2 = 2.5 \log \frac{F_2}{F_1} \tag{1}$$

برای به دست آوردن قدر در واحد زاویه فضایی یک جسم نیاز به شار در واحد زاویه فضایی جسم داریم.

پس **روشنایی سطحی** ($\boldsymbol{I}$) را برای جسمی با شار F و زاویه فضایی Ω اینگونه تعریف میکنیم:

$$\left.\begin{aligned} I \equiv \frac{F}{\Omega} = \frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{\frac{A}{d^2}} = \frac{L}{4\pi A} \\ L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \\ A = \pi R^2 \end{aligned}\right] \rightarrow I = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

پس داریم:

$$I = \frac{L}{4\pi A} \tag{2}$$

$$I = \frac{\sigma T^4}{\pi} \tag{3}$$

واحد I در معادله ۲، وات بر متر مربع بر استرادیان است. چون معمولا برای قدر سطحی از واحد ثانیه قوسی مربع استفاده می‌کنیم لازم است I را بر حسب وات بر متر مربع بر ثانیه قوسی مربع بنویسیم:

$$I = \frac{F}{\Omega(\mathrm{arcsec}^2)} = \frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{\frac{A}{d^2} \times 206265^2} = \frac{L}{4\pi A} \times \frac{1}{206265^2}$$

از معادله ۳ میبینیم مقدار I برابر شار سطحی ستاره و مستقل از فاصله است (شار سطحی همان کمیتی است که از قانون استفان-بولتزمن به دست می‌آید).

پس طبق تعریف قدر(رابطه 1)، قدر در واحد زاویه فضایی یک جسم را **قدر سطحی ($\boldsymbol{\mu}$)** نامیده و اینگونه تعریف میکنیم:

$$\mu_1 - \mu_2 = 2.5 \log \frac{I_2}{I_1} \qquad 4$$

باید توجه داشت که I از جنس شار است با این تفاوت که در واحد زاویه فضایی سنجیده می‌شود. یعنی می‌توانیم فرض کنیم I شار قسمتی از جسم با زاویه فضایی واحد است. پس می‌توانیم دقیقا مانند شار با آن برخورد کنیم و حتی به وسیله آن قدر را با قدر سطحی مقایسه کنیم:

$$\mu_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{I_1}{F_2} \qquad 5$$

- نکته‌ای که باید به آن توجه داشت این است که واحد زاویه فضایی در I_1 صرفا واحد زاویه فضایی μ_1 را تایین می‌کند. پس واحدهای F و I باید طوری باشند که با یکدیگر ساده شوند (درون لگاریتم بدون بعد باقی‌بماند).
- اصولا قدر سطحی را برحسب قدر بر ثانیه قوسی مربع ($\frac{mag}{arcsec^2}$) گزارش می‌کنند. پس باید حواسمان به تبدیل واحد ها باشد.

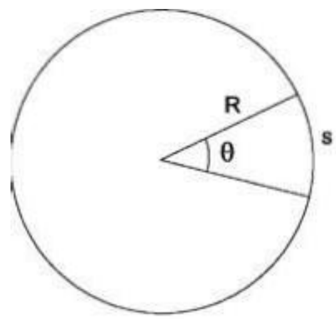
اگر رابطه 5 را برای یک جسم بنویسیم، با استفاده از رابطه 2 داریم:

$$\mu = m + 2.5 \log \Omega \qquad 6$$

* در بعضی کتاب‌ها روشنایی سطحی هم برای I و هم برای μ به کار می‌رود.

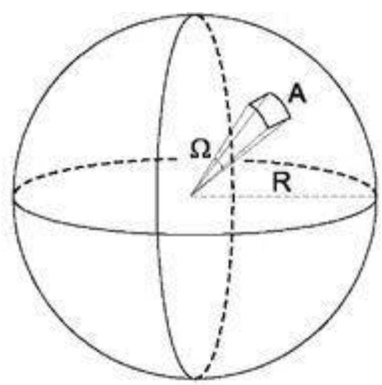
زاویه فضایی:

زاویه در دو بعد به این صورت تعریف می‌شود:



$\theta \equiv \frac{s}{R}$ radians

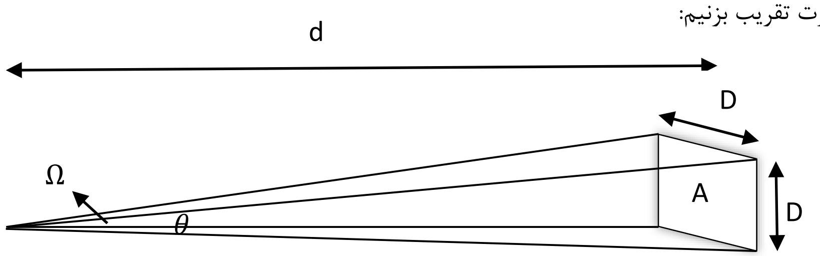
می‌خواهیم معیاری مانند زاویه را در سه بعد تعریف کنیم؛ به این صورت که هرچه از جسمی دورتر می‌شویم، همانطور که زاویه دو نقطه دلخواه روی آن کم می‌شود، زاویه فضایی آن هم کم شود. اگر همان تعریف زاویه را تعمیم دهیم خواهیم داشت:



$\Omega \equiv \frac{A}{R^2}$ steradians (sr)

پس معیاری سه بعدی، مانند زاویه در دو بعد تعریف کردیم و آن را زاویه فضایی می‌نامیم.

برای اجسام در فواصل دور می‌توانیم به این صورت تقریب بزنیم:



$$\theta = \frac{D}{d}$$

$$\Omega = \frac{A}{d^2} = \frac{D^2}{d^2} = \theta^2$$

پس می‌توان واحد زاویه فضایی (استرادیان یا sr) را معادل مجذور واحد زاویه (مجذور رادیان یا rad^2) تعریف کرد.

برای زاویه واحدهای دیگری مانند درجه($degree$)، دقیقه قوسی($arcmin$) و ثانیه قوسی($arcsec$) نیز داریم که می‌توان برای آن‌ها هم واحد معادل در زاویه فضایی تعریف کرد (مانند ثانیه قوسی مربع یا $arcsec^2$). روابط تبدیل واحد استرادیان به ثانیه قوسی مربع به این صورت خواهد بود:

$$1\ rad = \frac{180}{\pi} degree = \frac{180}{\pi} \times 60\ arcmin = \frac{180}{\pi} \times 60 \times 60\ arcsec \approx 206265\ arcsec$$

$$\rightarrow 1sr = 1rad^2 = 206265^2\ arcsec^2$$

$$\rightarrow \Omega = \frac{A}{d^2} \times 206265^2\ arcsec^2$$

مثال ۱: قدر سطحی خوشه کروی با قدر ظاهری 8 و زاویه فضایی $100\ arcmin^2$ (صد دقیقه قوسی مربع) چقدر است؟

حل: طبق رابطه 6:

$$\mu = m + 2.5 \log \Omega$$

$$\Omega = 100\ arcmin^2 = 360000\ arcsec^2$$

$$\rightarrow \mu = 21.9 \frac{mag}{arcsec^2}$$

مثال ۲: قدر سطحی کهکشانی بیضوی با 10^{11} ستاره خورشیدگون و شعاع $50\ kpc$ چقدر است؟

حل: با استفاده از معادله 5 داریم:

$$\mu - m_{sun} = -2.5 \log \frac{I}{F_{sun}}$$

$$I = \frac{L}{4\pi A} \times \frac{1}{206265^2}$$

$$L = 10^{11} L_{sun}$$

$$A = \pi R^2 = \pi \times 50^2\ kpc^2$$

$$\rightarrow I = 2.38 \times 10^{-11} \frac{L_{sun}}{pc^2 . arcsec^2} = 9.58 \times 10^{-18} \frac{W}{m^2 . arcsec^2}$$

$$F_{sun} = 1370 \frac{W}{m^2}$$

$$m_{sun} = -26.8$$

$$\rightarrow \mu = 23.5 \frac{mag}{arcsec^2}$$

مثال ۳: قدر سطحی کهکشانی ۲۷ قدر بر ثانیه قوسی مربع است. این مقدار معادل با چند $\frac{L_{sun}}{pc^2}$ است؟ ($M_{sun} = 4.83$)

حل: منظور سوال را می‌توان اینگونه گفت که در یک پارسک مربع، چند L_{sun} درخشندگی قرار دهیم تا مقدار قدر سطحی‌اش برابر ۲۷ شود. به بیان دیگر باید مقدار $\frac{L}{A}$ را محاسبه کنیم.

$$I = \frac{L}{4\pi A} \rightarrow \frac{L}{A} = 4\pi I$$

از معادله ۵ داریم:

$$\mu - M_{sun} = -2.5 \log \frac{I}{F_{sun}(d = 10pc)}$$

$$F_{sun} = \frac{L_{sun}}{4\pi(10pc)^2}$$

$$I = \frac{L}{4\pi A} \times \frac{1}{206265^2}$$

$$\rightarrow \mu - M_{sun} = -2.5 \log\left(\frac{L}{A} \cdot \frac{pc^2}{L_{sun}} \cdot \frac{100}{206265^2}\right) \rightarrow \frac{L}{A} = \frac{206265^2}{100} \times 10^{\frac{\mu - M_{sun}}{-2.5}} \frac{L_{sun}}{pc^2} = 0.58 \frac{L_{sun}}{pc^2}$$

مثال ۴: روشنایی سطحی مرکز یک کهکشان برابر است به ۱۵ قدر بر ثانیه قوسی مربع ($\frac{mag}{arcsec^2}$). یعنی در هر ثانیه‌ی قوسی مربع معادل چشمه نوری با قدر ۱۵ است. این روشنایی سطحی معادل با چند درخشندگی خورشید بر پارسک مربع ($\frac{L_{sun}}{pc^2}$) است؟ (مرحله ۱ دوره ۱۱)

حل: مرکز کهکشان را با خورشید مقایسه میکنیم.

$$\mu - m_{sun} = -2.5 \log \frac{I}{F_{sun}} \rightarrow \frac{I}{F_{sun}} = 10^{\frac{m_{sun} - \mu}{2.5}}$$

$$m_{sun} = -26.8$$

$$\frac{I}{F_{sun}} = \frac{\frac{L}{4\pi A} \times \frac{1}{206265^2}}{\frac{L_{sun}}{4\pi(1AU)^2}} = \frac{L}{L_{sun}} \times \frac{(1AU)^2}{A} \times \frac{1}{206265^2} = \frac{L}{L_{sun}} \times \frac{(1pc)^2}{A} \times \frac{1}{206265^4}$$

$$\rightarrow \frac{L}{A} \approx 34000 \frac{L_{sun}}{pc^2}$$

* این مثال را می‌توان با راه حل مثال قبل نیز حل کرد. جواب به دست آمده کمی متفاوت است که به دلیل دقیق نبودن ثواب است. (این اختلاف تفاوتی در پاسخ سوال در آزمون مرحله ۱ ایجاد نمی‌کند.)

مثال ۵: روشنایی سطحی خورشید بر حسب قدر بر ثانیه قوسی مربع چقدر است؟

حل:

$$\mu = m + 2.5 \log \Omega$$

$$\Omega = \frac{A}{d^2} \times 206265^2 = \frac{\pi R_{sun}^2}{(1AU^2)} \times 206265^2 = 2.9 \times 10^6 arscec^2$$

$$m = -26.7$$

$$\rightarrow \mu \approx -11 \frac{mag}{arscec^2}$$