یا حق

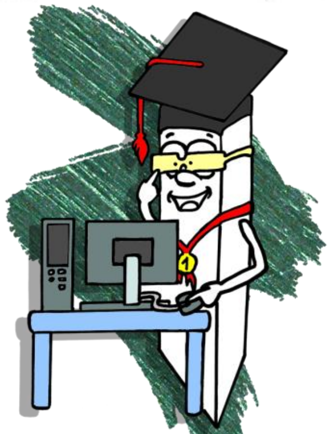
المپیاد آزمایشی آیریسک

شماره داوطلبی و رمز:

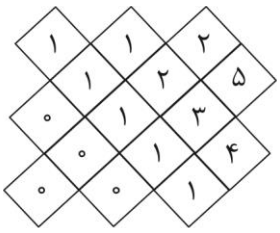
پاسخنامه کامپیوتر

دی ۱۳۹۸

۱۸۰ دقیقه



۱- گزینۀ ۱



اعداد نوشته شده روی خانه‌های تعداد حالات رسیدن به هر خانه است. که برای هر خانه برابر مجموع اعداد خانه‌هایی است که از آن خانه‌ها می‌توان به خانۀ مدنظر رفت و پس برابر ۴+۵ است.

۲- گزینۀ ۵

می‌توان گفت محیط اجتماع خانه‌هایی که مریض هستند در این مسأله ناوردا است و از آن‌جایی که این مقدار در ابتدا حداکثر برابر $۹ \times ۴ = ۳۶$ است، در صورتی‌که کل شهر مریض شوند این مقدار $۱۰ \times ۴ = ۴۰$ خواهد شد پس این اتفاق هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد.

۳- گزینۀ ۲

اگر تعداد باکتری‌ها در روز i ام را با f(i) نمایش دهیم و تعداد باکتری متولد شده در انتهای روز (i-۱) ام را با b(i) نمایش دهیم، داریم:

$b(۱) = ۱$

$f(۱) = ۱ \quad , \quad f(i) = ۳f(i-۱) - b(i-۴)$

$b(i) = ۲f(i-۱)$

و مقدار خواسته شدۀ سؤال $f(۱۰)$ است که برابر است با: ۱۸۶۳۲

۴- گزینهٔ ۳

جواد به صورت تصادفی یکی از دگمه‌های راست یا چپ را فشار می‌دهد سپس وارد صفحه‌ای می‌شود که یا همان صفحهٔ اولیه است و یا این‌که ۲ صفحه به صفحهٔ اولیه فاصله دارد و باید دو بار به عقب بازگردد پس می‌توان گفت داریم:

$$e = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 = 2$$

۵- گزینهٔ ۴

قضیه توران مطالعه شود.

۶- گزینهٔ ۳

۷- گزینهٔ ۳

عدد n را در نظر بگیرید. اگر این عدد جزء اعداد اول و آخر نباشد (وسط جایگشت باشد) آنگاه عدد اگر i,j را سمت راست و چپ مکان عدد n بگیریم، به مشکل برمی‌خوریم و حکم سؤال برقرار نیستو پس عدد n یا اول دنباله است یا آخر آن. حال عدد $n-1$ هم با استدلالی مشابه فقط ۲ مکان ممکن دارد. پس اگر از n شروع کنیم تا به ۱ برسیم، برای هر عدد غیر از ۱، می‌دانیم دو حالت داریم. پس: $f(n) = 2^{n-1}$

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9 = 2^{10} - 1 = 1023$$

۸- گزینهٔ ۲

هر ۴ راس از گراف را که بگیرید، تنها یک دور به طول ۴ در آن ۴ راس یافت می‌شود. پس پاسخ برابر است با: $C(6,4) = 15$

۹- گزینهٔ ۵

سطر اول و آخر را تماماً اسب می‌گذاریم، که ۱۲ اسب می‌شود. حال برای اثبات این‌که بیشتر از این نمی‌توان اسب گذاشت، کافی است خانه‌ها را طوری جفت کنیم که در هر جفت خانه تنها یک اسب بتوان گذاشت و با استفاده از اصل لانه کبوتری ثابت کنیم بیشتر از ۱۲ اسب نمی‌توان رد صفحه گذاشت.

۱۰- گزینهٔ ۲

اگر خانه مشخص شده در شکل زوج باشد، مکان خانه‌های زوج مشخص می‌شود. چون هر دو عدد زوج نسبت به هم اول نیستند. حال کافی است ۳ و ۶ را کنار هم نگذاریم تا شرط سؤال برقرار شود. برای این‌کار هم کافی است روی مکان ۶ حالت‌بندی کنیم.

۱۱- گزینهٔ ۴

۱۲- گزینهٔ ۲

کافی است وضعیت ۶ خانه اول را به گونه تنظیم کنیم که شرط سؤال برقرار باشد. آنگاه بقیه خانه‌ها به طور یکتا مشخص می‌شوند. پس پاسخ برابر است با انتخاب ۴ از ۶ یعنی گزینهٔ ۲.

۱۳- گزینهٔ ۲

تعداد کل حالات برابر است با: $C(۹,۳) \times C(۸,۳)$

و تعداد حالت‌هایی که عدد ارشیا بزرگ‌تر از مهدی باشد برابر است با:

۱- یا ارشیا عدد ۹ را برمی‌دارد که در این صورت حتماً می‌برد و تعداد این حالات برابر است با: $C(۸,۲) \times C(۸,۳)$

۲- یا ارشیا ۹ را برنمی‌دارد که جز حالاتی که بازی مساوی می‌شود در نصف حالات دیگر بازی را می‌برد (چرا؟) که تعداد این حالات برابر است با:

$$\frac{C(۸,۳) \times C(۸,۳) - C(۸,۳)}{۲}$$

۱۴- گزینهٔ ۱

سؤال را می‌توان به مسئله زیر تبدیل کرد

$$a+b+c \le ۸ \ , \quad a \ge ۱ \quad , \ b,c \ge ۲$$

که مسئله بالا را نیز می‌توان به مسئله زیر تبدیل کرد:

$$a+b+c+d = ۷ \quad , \quad a,b,c,d \ge ۱$$

که جواب این مسئله برابر است با: $C(۶,۳)$

حال فقط باید طریقه‌های چینش این سه نفر که برابر !۳ است را نیز در جواب ضرب کنیم.

۱۵- گزینهٔ ۵

سؤال را می‌توان به مسئله زیر تبدیل کرد:

$$x_۱ + \cdots + x_k \le ۱۵ \quad , \quad x_۱ \ge k \ , \ \ (i > ۱) \ x_i \ge ۲$$

که مسئله بالا را نیز می‌توان به مسئله زیر تبدیل کرد:

$$x_۱ + \cdots + x_k \le ۱۷ - ۲k \quad , \quad x_i \ge ۱$$

که مسئله بالا را نیز می‌توان به مسئله زیر تبدیل کرد:

$$x_۰ + \cdots + x_k \leq ۱۸ - ۲k \quad , \quad x_i = ۱$$

که جواب مسئله بالا برابر است با: $C(۱۷-۲k\ ,\ k)$

حال به ازای مقادیر $۱ \leq k \leq ۵$ جواب‌ها را جمع می‌کنیم و مسئله حل می‌شود.

۱۶- گزینهٔ ۲

نقاطی قابل رسیدن هستند که شرایط زیر را داشته باشند (چرا؟)

$$x + y = ۲k \quad , \quad |x| + |y| \leq ۱۰$$

که با حالت‌بندی روی x می‌توان فهمید جواب برابر است با: $۱+۲+\cdots+۱۰+۱۱+۱۰+\cdots+۲+۱$

۱۷- گزینهٔ ۲

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت اگر افراد به ترتیب n-۲، n-۱ و n مهره داشته باشند، بعد از ۳ مرحله به ترتیب n-۳، n-۲ و n-۱ مهره دارند. پس افراد بعد از ۳۶ مرحله ۱، ۲، ۳ مهره دارند و در مرحله ۳۷ ام مهره نفر سوم تمام می‌شود.

۱۸- گزینهٔ ۴

اگر عدد سطر i ام و ستون j ام را در جدول اول a(i,j) و در جدول دوم b(i,j) بنامیم در این صورت

$$a(i,j) = ۱۳(i-۱) + j \quad , \quad b(i,j) = ۱۷(j-۱) + i$$

پس ما دنبال اعدادی هستیم که:

$$۱۳(i-۱) + j = ۱۷(j-۱) + i$$
$$۱۳i - ۱۷j + ۴ = i - j$$
$$۱۲i - ۱۶j + ۴ = ۰$$
$$۳i - ۴j + ۱ = ۰$$
$$۳i = ۴j - ۱$$
$$i = ۴k + ۱$$
$$i = j = ۱\ ,\ a(i,j) = b(i,j) = ۱$$
$$i = ۵\ ,\ j = ۴\ ,\ a(i,j) = b(i,j) = ۵۶$$
$$i = ۹\ ,\ j = ۷\ ,\ a(i,j) = b(i,j) = ۱۱۱$$
$$i = ۱۳\ ,\ j = ۱۰\ ,\ a(i,j) = b(i,j) = ۱۶۶$$
$$i = ۱۷\ ,\ j = ۱۳\ ,\ a(i,j) = b(i,j) = ۲۲۱$$

۱۹- گزینهٔ ۴

اعداد با مجموع ارقام ۳ و تعداد ارقام k، حتماً به یکی از فرم‌های زیر هستند:

(تعدادی ۰) ۳

(تعدادی ۰) ۱ (تعدادی ۰) ۲

(تعدادی ۰) ۲ (تعدادی ۰) ۱

(تعدادی ۰) ۱ (تعدادی ۰) ۱ (تعدادی ۰) ۱

تعداد کلی این اعداد برابر است با: $۱+۲(k-۱)+C(k-۱,۲)=C(k,۲)+k$

پس تعداد اعداد حداکثر k رقمی برابر است با: $C(k+۱,۳)+C(k+۱,۲)=C(k+۲,۳)$

۲۰- گزینهٔ ۲

می‌توان مشاهده کرد که تعداد تغییرات بیت i ام $(i>۱)$ از عدد ۱ تا x برابر $\left[\frac{x}{۲^{i-۱}}\right]$ است. پس داریم:

$$\left(\left[\frac{۲۳۴۱}{۲^{۶-۱}}\right]-\left[\frac{۷۳}{۲^{۶-۱}}\right]\right)+\left(\left[\frac{۲۳۴۱}{۲^{۵-۱}}\right]-\left[\frac{۷۳}{۲^{۵-۱}}\right]\right)+\left(\left[\frac{۲۳۴۱}{۲^{۳-۱}}\right]-\left[\frac{۷۳}{۲^{۳-۱}}\right]\right)=۷۸۰$$

۲۱- گزینهٔ ۳

احتمال خواسته شده را P در نظر می‌گیریم، داریم:

$$P=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱-P}{۳}$$

$$\xrightarrow{\times ۱۲} ۱۲p=۳+۳-۳p \rightarrow ۱۵p=۶ \rightarrow p=\frac{۲}{۵}$$

۲۲- گزینهٔ ۳

فرض کنید یک بخش x عضو داشته باشد. کارهای بخش به f(x) حالت انجام شود. x حالت برای فرد اول این بخش که خودرو را به تصادف تحویل می‌گیرد وجود دارد اگر این فرد کار خودرو را انجام دهد که هیچ در غیر این صورت به $f_{(x-۱)}$ حالت $x-۱$ نفر باقیمانده کارهای خودرو را انجام می‌دهند.

$$\begin{aligned} f_{(x)} &= x f_{(x-۱)} \\ f_{(۱)} &= ۱ \end{aligned} \quad \rightarrow f_{(x)}=x!$$

پس برای جواب داریم: $f_{(۳)} \times f_{(۱)} \times f_{(۲)} \times f_{(۵)} = ۱۴۴۰$

۲۳- گزینهٔ ۲

می‌توان دید برای هر سطر $\binom{۷}{۳}$ حالت داریم. از آن‌جایی که باید ۴ سطر بالاتر برویم داریم:

$$\binom{۷}{۳} \times \binom{۷}{۳} \times \binom{۷}{۳} \times \binom{۷}{۳} = ۳۵^۴$$

۲۴- گزینهٔ ۳

با کمی دقت متوجه می‌شویم که عدد انتخابی عبدول در نمایش دو دویی است از سمت راست تعداد بیت‌های یک بیشتری داشته باشد بر عدد بزرگ‌تر می‌رسیم. در نتیجه اگر عدد عبدول ۳۱ باشد بیشترین مقدار پول ممکن از جرج را می‌گیرد.

$$\underbrace{۳۱}_{\text{مرحله اول}} + \underbrace{\frac{۳۱-۱}{۲} + ۲۵۶}_{\text{مرحله دوم}} + \underbrace{\frac{۲۷۱-۱}{۲} + ۲۵۶}_{\text{مرحله سوم}} + \underbrace{\frac{۳۹۱-۱}{۲} + ۲۵۶}_{\text{مرحله چهارم}} + \underbrace{\frac{۴۵۱-۱}{۲} + ۲۵۶}_{\text{مرحله پنجم}} + \underbrace{\frac{۴۸۱-۱}{۲} + ۲۵۶}_{\text{مرحله ششم}} = ۲۱۲۱$$

۲۵- گزینهٔ ۵

می‌توان ثابت کرد که بیشتر از نصف اعداد نمی‌توانند مثبت باشند. چون اگر بیشتر از نصب اعداد مثبت باشند، آنگاه دو عدد مثبت که مجاور هستند حتماً یافت می‌شوند و ...

پس تعداد اعداد مثبت حداکثر ۵۰ تاست. از طرفی اگر ۵۰ تا باشد هم ممکن نیستو چون باز هم باید اعداد یکی در میان مثبت و منفی باشند (اگر نباشند مثل بالا دو عدد مثبت مجاور یافت می‌شود و ...)

پس اعداد یکی در میان مثبت و منفی هستند. حال کمترین عدد منفی را در نظر بگیرید و سعی کنید به تناقض برسید.

پس تعداد اعداد مثبت حداکثر ۴۹ تاست. حال یک روش ارائه می‌دهیم که ۴۹ عدد مثبت و ۵۱ عدد منفی داشته باشد.

اعداد را روی یک خط می‌نویسیم و شما دایره‌ای در نظر بگیرید. یعنی فرض کنید عدد اول و آخر مجاور هستند.

مشاهده می‌کنید در مثال زیر، ۴۹ عدد مثبت به کار رفته که در گزینه ۵ آمده است.

$$-۵۱, -۵۰, -۴۹, ۱, -۴۸, ۱, -۴۶, ۱, \ldots, -۱, ۱$$

www.gachesefid.com

طراحانِ المپیادهای آزمایشی آیریسک در آزمونِ دومِ سال ۱۳۹۸

رشته	سرگروه و طراح	گروهِ طراحان
ادبی	میرسالار رضوی	بهراد بنائی- فاطمه داوودی- ستایش دشتی- حمیدرضا سلمانی- یاسمن صانعی سید رضا موسوی هفتادر
ریاضی	سید ابوالفضل رحیمی	سروش رضایی- سامان کاظمی- جواد فرخ‌نژاد
زیست‌شناسی	علیرضا تجملیان ابوالفضل جوهری	نوید ابراهیمی- هلیا پور شهبازی- پیام فتاحی- شایان فرقانی- امیرفهام فلاح‌پور ثنا قربانی- امین علیزاده- سینا گلستانی- احسان گودرزی- فاطمه محمودی- امیرحسین نعمتی- مریم یوسفی اصل
سلول‌های بنیادی	طه چرتاب محمدی	صالحه خراسانی- پانیذ قاسمی
شیمی	علیرضا مسکاران	ایمان اسکویی- آرش باقریان- ارشیا خادمی- آرمیتا روزبه- سعید شیری- محمد صادق‌سا محمدجواد علیمحمدی- حمید مفخم- سمیرا میرشی- نسیم نوری
فیزیک	ارشیا افضل	امیرحسین بریری- شروین خلفی
کامپیوتر	جواد کریمی	امیرمحمد ایمانی- علی توسلی- مهربد جوادی- محمدعلی حیدری- ارشیا دادرس امیرحمد سادات شکوهی- فرشید نوشی
نجوم	سعید مذهب	علی جوانمرد- حسین مصحفی- سید علی وکیلی
برنامه‌ریزی و هماهنگی مجموعهٔ المپیادهای آزمایشی: مرتضی خلینا		

با آرزوی موفقیت برای همهٔ شرکت‌کنندگان در این آزمون، پاسخ تشریحی را از ساعت ۱۸ یکشنبه ۲۹ دی‌ماه از سایت www.gachesefid.com ببینید. برای دیدن کارنامه‌های فردی و رتبه‌بندی، نام کاربری و رمز عبور را **(همین الآن)** از مسئول آزمون در محل برگزاری بگیرید و در سامانهٔ گچ‌سفید وارد شوید، در اولین ورود اطلاعات شما به طور خودکار تکمیل می‌شود. اگر در آزمون قبلی شرکت کرده‌اید، نام کاربری و رمز شما تغییر نکرده و همان است که قبلاً در سامانه تعریف شده است.

اردوی آمادگی مرحلهٔ اول المپیاد در روزهای ۲۹ و ۳۰ دی‌ماه و اردوی آمادگی مرحلهٔ دوم از ۶ تا ۱۱ فروردین ۱۳۹۹ به صورت متمرکز در تهران برگزار می‌شود. برای کسب اطلاعات بیشتر به سایت آیریسک (wwww.irysc.com) مراجعه کرده یا با ما تماس بگیرید:

۰۲۱۶۶۹۱۷۲۳۰-۳۱